

R o z d z i a ł 8

POLE MAGNETYCZNE

Oddziaływania magnetyczne odkryto wcześniej niż oddziaływania elektryczne. Wiąże się to z istnieniem w przyrodzie tzw. magnesów trwałych (np. rudy żelaza – magnetytu), jak również z tym, że Ziemia zachowuje się jak wielki magnes. Magnesy wywierają działanie na żelazo i stal. Sztuczne magnesy stalowe znalazły szerokie zastosowania jako wskaźniki kierunku północnego i południowego na Ziemi (tzw. kompasy).

Z historią rozwoju magnetyzmu, a w latach późniejszych elektromagnetyzmu, wiążą się m.in. nazwiska Coulomba (który w 1785 roku sformułował nie tylko znane nam już prawo oddziaływania ładunków elektrycznych, ale również prawo wzajemnego oddziaływania biegunów magnetycznych), Oersteda, Ampere'a, Biota i Savarta (pole magnetyczne prądu elektrycznego), Faradaya i Lenza (indukcja elektromagnetyczna).

W początkowym okresie rozwoju magnetyzmu wprowadzono pojęcie mas magnetycznych: północnej i południowej (lub dodatniej i ujemnej), stwierdzając równocześnie niemożliwość ich rozdzielenia (zasadnicza różnica w stosunku do ładunków elektrycznych dodatnich i ujemnych). Z biegiem czasu pojęcie masy magnetycznej wyszło z użycia; obecnie nie traktujemy już sił magnetycznych jako skutku istnienia mas magnetycznych. Posługujemy się jednak w dalszym ciągu pojęciem biegunów magnetycznych, mając na myśli takie obszary w pobliżu końców magnesów trwałych (w postaci sztabek, podków itp.) lub elektromagnesów, w których dają się zauważyć najsilniejsze oddziaływania magnetyczne (np. jeśli magnes sztabkowy zbliżymy do opiłków żelaznych, to bieguny magnetyczne przyciągają ich najwięcej).

Istnienie pól magnetycznych jest traktowane obecnie (jako następstwo wtórne), jako skutek ruchu ładunków elektrycznych. W chwili obecnej obowiązuje pogląd, że wszelki przepływ prądu elektrycznego powoduje powstanie pola magnetycznego. Jest to zjawisko

niezależne od natury prądu je wywołującego: może to być prąd elektronowy w przewodniku metalicznym, prąd jonowy w elektrolicie, czy prąd w gazie. Pole magnetyczne towarzyszy też ruchowi elektronów w atomie, ruchowi jąder atomowych w cząsteczkach itd.

Do charakterystyki wektorowej pola magnetycznego (podobnie jak dla pola elektrycznego) wykorzystuje się dwa wektory, a mianowicie: wektor indukcji magnetycznej \vec{B} oraz wektor natężenia pola magnetycznego \vec{H} . Pole magnetyczne nazywamy jednorodnym, jeżeli w każdym punkcie tego pola istnieje taki sam wektor \vec{B} (lub \vec{H}) tzn. w każdym punkcie pola wektor ten ma tę samą wartość, zwrot i kierunek.

8.1. Siła Lorentza. Indukcja magnetyczna.

Z doświadczenia wiemy, że źródłami sił magnetycznych są:

- magnesy stałe (np. magnesy sztabkowe),
- przewodniki, w których płynie prąd elektryczny (np. selenoid),
- poruszające się ładunki elektryczne (np. elektrony w lampie kineskopowej telewizora).

Jeżeli w przestrzeni działają siły na przewodniki z prądem, poruszające się ładunki elektryczne lub bieguny magnesu to mówimy, że w przestrzeni istnieje pole magnetyczne. Podobnie jak w przypadku sił elektrycznych posługujemy tu się koncepcją „oddziaływania przez pole”, według której dwa obiekty oddziałują na siebie w ten sposób, że obiekt A (np. przewodnik z prądem lub magnes) wytwarza pole magnetyczne, które działa siłą na obiekt B (którym może być także prąd lub magnes).

Oddziaływania pola magnetycznego na prąd lub magnes trwałe można sprowadzić do bardziej elementarnego działania – pola magnetycznego na poruszający się ładunek punktowy. Załóżmy, że w polu magnetycznym porusza się z prędkością \vec{v} ładunek próbny q_0 . Okazuje się, że pole magnetyczne działa na poruszający się ładunek elektryczny siłą \vec{F} . Zmieniając prędkość \vec{v} ładunku próbnego, można stwierdzić, że niezależnie od kierunku jego prędkości \vec{v} , siła \vec{F} jest zawsze do niej prostopadła, natomiast wartość bezwzględna siły zależy od wartości i od kierunku prędkości. Zawsze można znaleźć taki kierunek prędkości, aby wartość siły była maksymalna oraz taki kierunek – prostopadły do poprzedniego – aby siła była równa zero. Zależność siły \vec{F} od prędkości \vec{v} ładunku próbnego q_0 można wyrazić prostym wzorem, jeśli wprowadzimy wektor \vec{B} opisujący pole magnetyczne, zwany wektorem indukcji magnetycznej. Wektor ten definiujemy następująco:

W przestrzeni istnieje pole magnetyczne o indukcji \vec{B} , jeżeli na ładunek próbny q_0 poruszający się w tej przestrzeni z prędkością \vec{v} działa siła \vec{F} :

$$\vec{F} = q_0 (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (8.1)$$

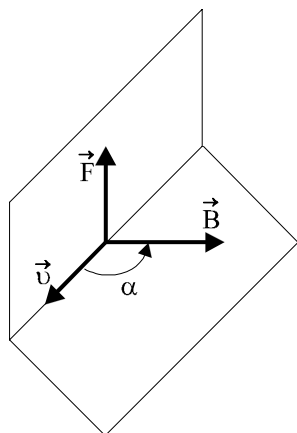
Zgodnie z definicją iloczynu wektorowego, wartość bezwzględna siły wyraża się wzorem:

$$F = q_0 v B \sin \alpha \quad (8.2)$$

gdzie α to kąt między \vec{v} i \vec{B} .

Związki między wektorami \vec{v} , \vec{B} i \vec{F} przedstawiono na ryz. 8.1. Wektor \vec{F} jest prostopadły do wektorów \vec{v} i \vec{B} . Wartość siły jest maksymalna, gdy $\vec{v} \perp \vec{B}$. Gdy wektory \vec{v} i \vec{B} są do siebie równoległe to siła $\vec{F} = 0$.

Zwróćmy uwagę, że w odróżnieniu od siły elektrycznej siła magnetyczna działa tylko na ładunki w ruchu oraz, że jej kierunek jest zawsze prostopadły do kierunku wektora \vec{B} . Siłę magnetyczną wyrażoną wzorem (8.1) nazywamy często siłą Lorentza, a sam wzór – wzorem Lorentza.



Rys.8.1. Z właściwości iloczynu wektorowego opisującego siłę Lorentza wynika, że trzy wektory \vec{v} , \vec{B} i \vec{F} stanowią taki układ, że siła \vec{F} jest prostopadła do płaszczyzny wektorów \vec{v} i \vec{B} , zaś zwrot siły \vec{F} określa reguła śruby prawoskrętnej.

Z równania (8.1) znajdujemy, że jednostką \vec{B} jest $\left[\frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m/s}} \right]$ lub $\left[\frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \right]$. Jednostce tej nadano nazwę tesla (skrót T), czyli

$$[\text{T}] = \left[\frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \right]$$

Z wektorem indukcji magnetycznej zazwyczaj kojarzymy:

- pojęcie linii sił indukcji magnetycznej (linia sił indukcji jest w każdym swym punkcie styczna do kierunku \vec{B}),
- pojęcie strumienia indukcji magnetycznej przez powierzchnię (podobnie jak dla pola elektrycznego) określonego jako:

$$\Phi_{B,S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (8.3)$$

Jednostką strumienia $\Phi_{B,S}$ jest $[T \cdot m^2]$. Jednostce tej nadano nazwę weber (skrót Wb).

$$[Wb] = [T \cdot m^2]$$

8.2. Siła elektrodynamiczna

Ponieważ prąd elektryczny jest uporządkowanym przepływem ładunków elektrycznych, więc należy się spodziewać, że pole magnetyczne będzie wywierać siłę na przewodnik, w którym płynie prąd.

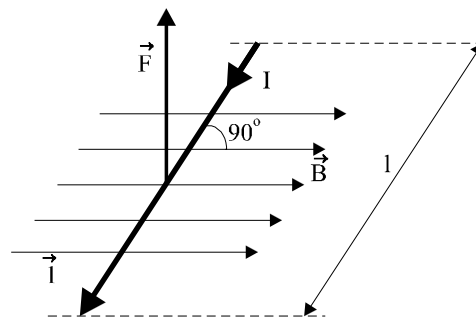
Siłę tą nazywamy siłą elektrodynamiczną.

Pamiętamy, że w przewodniku metalowym nośnikami prądu są swobodne elektrony o ładunku $-e$. Poruszają się one od potencjału niższego do wyższego, a więc w kierunku przeciwnym względem kierunku przyjmowanego normalnie za kierunek przepływu prądu (umownie za kierunek przepływu prądu uważa się kierunek przepływu ładunków dodatnich). Łatwo sprawdzić, że podstawienie do wzoru na siłę Lorentza wielkości związanych z ruchem rzeczywistych nośników czyli elektronów o ładunku $(-e)$ i prędkości $(-\vec{v})$ da wynik identyczny z tym, jaki otrzymalibyśmy odnosząc wzór do nośników o ładunku $(+e)$, mających prędkość przeciwnie skierowaną $(+\vec{v})$

$$\vec{F} = -e(-\vec{v} \times \vec{B}) = e(\vec{v} \times \vec{B})$$

Innymi słowy, badanie siły działającej na przewodnik z prądem w polu magnetycznym nie pozwala stwierdzić charakteru nośników prądu.

Rys.8.2. Siła elektrodynamiczna \vec{F} działająca na przewodnik z prądem I umieszczonym w polu magnetycznym \vec{B} .



W celu obliczenia siły pochodzącej od jednorodnego pola i działającej na odcinek l przewodu, przez który płynie prąd I , rozważmy początkowo przypadek, gdy przewodnik umieszczony jest prostopadle do \vec{B} (rys.8.2). W tych warunkach siła \vec{F} , działająca na każdy z

nośników prądu, będzie jednakowo skierowana (prostopadle do \vec{v} i do \vec{B}) i równa $F' = e\vec{v}B$. A zatem siła wypadkowa będzie równa sumie arytmetycznej sił działających na wszystkie nośniki znajdujące się w rozważanym odcinku przewodu. Przyjmując, że gęstość nośników prądu (liczba nośników w jednostce objętości) jest n , znajdziemy, że ogólna ich liczba w odcinku l przewodnika o przekroju S wynosi $n l S$.

Siła wypadkowa jest więc równa

$$F = n l S F' = n l S e v B = B \cdot e n S v \cdot l \quad (8.4)$$

Warto tu podkreślić, że występująca we wzorze prędkość v jest prędkością średnią ruchu poszczególnych nośników prądu (a nie np. prędkością ruchu przewodnika jako całości). Z kolei natężenie prądu I płynącego w przewodniku można określić jako ładunek Q przepływający w jednostce czasu t przez przekrój poprzeczny S tego przewodnika, a więc natężenie prądu możemy zapisać:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{e \cdot n \cdot S \cdot l}{t} = e n S v \quad (8.5)$$

Podstawiając (8.5) do (8.4) otrzymujemy:

$$F = B \cdot I \cdot l \quad (8.6)$$

Wzór ten wyraża siłę \vec{F} działającą na prostoliniowy przewód z prądem w przypadku prostopadłego ustawienia l i \vec{B} . W przypadku ogólnym prostoliniowego przewodnika o długości l tworzącego dowolny kąt α z wektorem indukcji magnetycznej \vec{B} siła \vec{F} wyraża się wzorem:

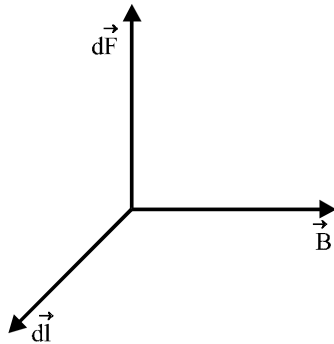
$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}); \quad F = B \cdot I \cdot l \sin \alpha \quad (8.7)$$

Wprowadzone w tym wzorze oznaczenie \vec{l} przedstawia wektor o wartości liczbowej l równej długości prostoliniowego odcinka przewodu, o kierunku zgodnym z tym przewodem i o zwrocie wyznaczonym przez kierunek przepływu prądu, tzn. przez kierunek ruchu ładunków dodatnich. W przypadku, gdy mamy do czynienia z przewodnikiem krzywoliniowym stosujemy różniczkową postać wzoru (8.7) w postaci:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (8.8)$$

Wzajemne przestrzenne relacje kierunków $d\vec{l}$, \vec{B} i $d\vec{F}$ przedstawia rys.8.3.

Wzór (8.8) jest to wzór Ampere'a (Ampera) na siłę elektrodynamiczną.



Rys.8.3. Działanie siły elektrodynamicznej $d\vec{F}$ na element długości $d\vec{l}$ przewodnika z prądem umieszczony w dowolnym polu magnetycznym \vec{B} .

Zwróćmy uwagę na istotną osobliwość sił oddziaływania elektromagnetycznego, wyrażającą się wzorem Ampera. W elektrostatyce mieliśmy do czynienia z siłami centralnymi, ponieważ siła oddziaływania dwóch ładunków punktowych jest skierowana wzdłuż prostej łączącej te ładunki. Tymczasem siły oddziaływania elektromagnetycznego – jak to wynika z wzoru Ampera, nie są siłami centralnymi, są one zawsze skierowane prostopadle do linii sił pola magnetycznego.

8.3. Prawo Biota-Savarta-Laplace'a

Działanie magnetyczne prądu wykrył w 1820 roku Oersted. W pobliżu przewodnika z prądem umieszczał on igłę magnetyczną. Okazało się, że po włączeniu prądu igła magnetyczna ulegała odchyleniu, którego kierunek zmieniał się wraz ze zmianą kierunku prądu.

Uczeni francuscy Biot i Savart kontynuowali badania Oersteda nad polem magnetycznym prądów elektrycznych. W wyniku wielu doświadczeń stwierdzili, że:

- indukcja pola magnetycznego B w danym punkcie ośrodka jest wprost proporcjonalna do natężenia prądu I płynącego w przewodniku,
- indukcja pola magnetycznego B w danym punkcie ośrodka zależy od kształtu i rozmiarów przewodnika z prądem,
- indukcja pola magnetycznego B w danym punkcie ośrodka zależy od położenia tego punktu względem przewodnika.

Biot i Savart otrzymali nawet wzory na indukcję B w poszczególnych przypadkach, ale nie umieli wyprowadzić wzoru ogólnego. Dopiero Laplace (filozof, astronom, fizyk, a głównie znany matematyk) poradził sobie z tym problemem. Laplace sformułował swą hipotezę następująco: Indukcja \vec{B} w dowolnym punkcie pola magnetycznego dowolnego przewodnika z prądem stanowi wektorową sumę przyczynków indukcji $d\vec{B}$ pochodzących od

elementów $d\vec{l}$ przewodnika z prądem I . Jest to zasada superpozycji tj. zasada niezależnego działania pól (z tą zasadą spotkaliśmy się już w przypadku pola elektrycznego).

Niech CD (rys.8.4) przedstawia odcinek długiego krzywoliniowego przewodnika, przez który płynie prąd I . Dla obliczenia indukcji magnetycznej \vec{B} w punkcie A dzielimy przewodnik na nieskończenie małe elementy $d\vec{l}$, traktując je jako wektory o zwrocie zgodnym ze zwrotem I . Jeden z takich elementów zaznaczony jest na rys.8.4. Jego odległość od punktu A wynosi r (zwrot wektora \vec{r} od elementu przewodnika do punktu A).

Zgodnie z prawem Biota-Savarta-Laplace'a (prawo B-S-L) nieskończenie mały element $d\vec{l}$ przewodnika z prądem wytwarza w punkcie A odległym od $d\vec{l}$ o r indukcję magnetyczną $d\vec{B}$ a mianowicie:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{I}{r^3} (d\vec{l} \times \vec{r}) \quad (8.9)$$

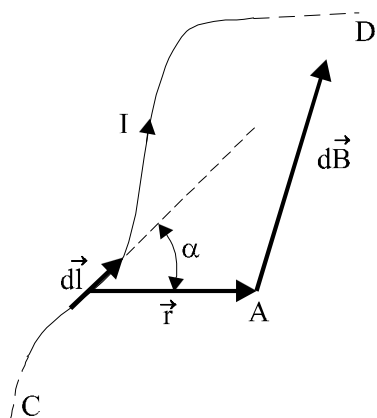
Wzór (8.9) w postaci skalarnej możemy zapisać

$$dB = |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{I}{r^2} dl \sin \alpha \quad (8.10)$$

gdzie α oznacza kąt między wektorem $d\vec{l}$ i \vec{r} .

A zatem ujmując słownie treść wzorów (8.9) i (8.10) powiemy, że

1. Wartość liczbowa indukcji $d\vec{B}$ wywołanej przez element $d\vec{l}$ przewodnika jest proporcjonalna na natężenia prądu I , do długości elementu dl , odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości r i zależna od kąta α utworzonego przez kierunki $d\vec{l}$ i \vec{r} .



Rys.8.4. $d\vec{B}$ jest indukcją pola magnetycznego, jakie wytwarza element $d\vec{l}$ przewodnika z prądem I w odległości r od tego elementu.

2. Kierunek i zwrot $d\vec{B}$ jest zgodny z kierunkiem i zwrotem iloczynu wektorowego $d\vec{l} \times \vec{r}$.

Całkowita indukcja \vec{B} wytworzona w punkcie A dzięki przepływowi prądu w całym przewodniku jest sumą geometryczną wektorów $d\vec{B}$ wytworzonych przez wszystkie elementy $d\vec{l}$ przewodnika, a zatem \vec{B} jest całką wektorową o postaci:

$$\vec{B} = \int_{\text{po całym przewodniku}} d\vec{B} = \int_{\text{po całym przewodniku}} \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{I}{r^3} (d\vec{l} \times \vec{r}) \quad (8.11)$$

Współczynnik $\mu = \mu_0 \mu_r$ we wzorach (8.9), (8.10 i (8.11) charakteryzuje magnetyczne właściwości ośrodka, w którym znajduje się przewodnik i nosi nazwę przenikalności magnetycznej. Dla próżni przenikalność magnetyczna wynosi

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{Am}}$$

Przenikalność magnetyczną ośrodków można przedstawić w postaci:

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

gdzie μ_r – liczba niemianowana, zwana względną przenikalnością magnetyczną.

W tabelicy 8.1. podano względne przenikalności magnetyczne niektórych ciał. Jak widać, mieszczą się one w szerokich granicach, szczególnie duże wartości osiągając dla ciał zwanych ferromagnetykami, których przedstawicielem jest żelazo (stal).

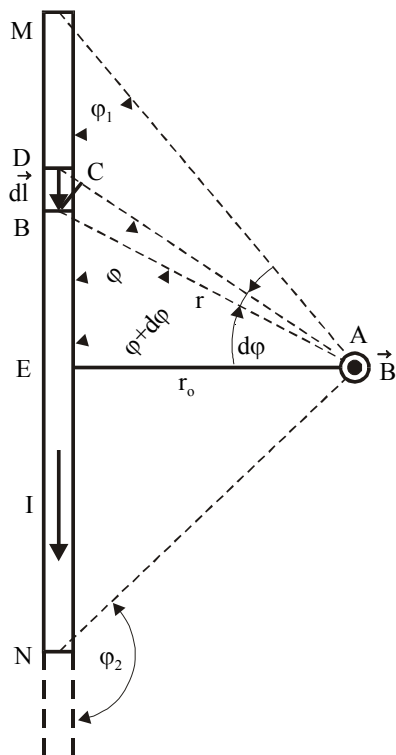
Tabela 8.1.

Względne przenikalności magnetyczne różnych ośrodków

Ośrodek	Względna przenikalność magnetyczna μ_r
Próżnia	1
Powietrze	1,0000004
Glin	1,000008
Woda	0,999991
Miedź	0,999999
Stal (0,03% C)	ok. 2000
Stal (0,99% C)	ok. 300

8.4. Pole magnetyczne prostoliniowego przewodnika z prądem

Wzór (8.9) pozwala na obliczenie drogą całkowania indukcji B dla konkretnych przypadków prądu elektrycznego. Jednym z takich przykładów jest prąd płynący w cienkim, nieskończenie długim prostoliniowym przewodniku.



Rys.8.5. Pole magnetyczne prostoliniowego przewodnika z prądem.

W tym przypadku indukcję magnetyczną \vec{B} w punkcie A, leżącym w odległości r_0 od nieskończenie długiego, prostoliniowego przewodnika z prądem możemy zapisać jako:

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi r^2} I \sin \varphi dl \quad (8.12)$$

gdyż sumowanie wektorowe wszystkich indukcji $d\vec{B}$ pochodzących od nieskończenie małych elementów $d\vec{l}$ przewodnika można zastąpić zwykłym sumowaniem arytmetycznym w związku z tym, że kierunki i zwroty wszystkich wektorów $d\vec{B}$ są jednakowe (w przypadku przedstawionym na rys.8.5 – prostopadle do płaszczyzny rysunku w górę).

Łączymy punkt A z końcami elementu $|d\vec{l}| = BD$. Odległość BA oznaczamy przez r . Kąt EDA oznaczamy przez φ , a kąt EBA przez $\varphi + d\varphi$. Postarajmy się dl wyrazić za pośrednictwem r_0 , r i φ . Z rozważań geometrycznych wynika, że kąt BAD wynosi $d\varphi$.

Z punktu B spuszczamy na DA prostopadłą BC, co jest prawie równoważne z zakreśleniem łuku BC promieniem r. Z definicji kąta łukowego wynika:

$$BC = r \cdot d\varphi \quad (8.13)$$

Z trójkąta DCB otrzymujemy:

$$BC = dl \cdot \sin \varphi; \quad dl = \frac{rd\varphi}{\sin \varphi} \quad (8.14)$$

Z trójkąta AEB wynika, że:

$$r = \frac{r_0}{\sin \varphi} \quad (8.15)$$

Podstawiając (8.14) i (8.15) do (8.12) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} B &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 \mu_r \sin^2 \varphi}{4\pi r_0^2} \cdot I \sin \varphi \frac{r_0}{\sin \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sin \varphi} \\ B &= \frac{\mu_0 \mu_r \cdot I}{4\pi r_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi \\ B &= \frac{\mu_0 \mu_r \cdot I}{4\pi r_0} (-\cos \varphi) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{\mu_0 \mu_r \cdot I}{4\pi r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \end{aligned} \quad (8.16)$$

Wzór (8.16) określa indukcję magnetyczną B pochodzącą od prostoliniowego przewodnika z prądem o skończonej długości, gdzie kąty φ_1 i φ_2 wyznaczają granice położenia promieni r na końcach przewodnika.

W odniesieniu do przewodnika prostoliniowego nieskończenie długiego granice całkowania przyjmą wartości:

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{i} \quad \varphi_2 = \pi$$

i wtedy indukcja B w punkcie A będzie równa

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r \cdot I}{4\pi r_0} (1 + 1) = \frac{\mu_0 \mu_r \cdot I}{2\pi r_0} \quad (8.17)$$

Ponieważ między wektorami indukcji magnetycznej \vec{B} i natężenia pola magnetycznego \vec{H} zachodzi związek

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (8.18)$$

to wzór (8.17) przyjmuje postać:

$$H = \frac{I}{2\pi r_0} \quad (8.19)$$

Wzór (8.19) służy do definicji jednostki natężenia pola magnetycznego H w układzie SI.

W układzie SI jednostką natężenia pola magnetycznego H jest $\left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$.

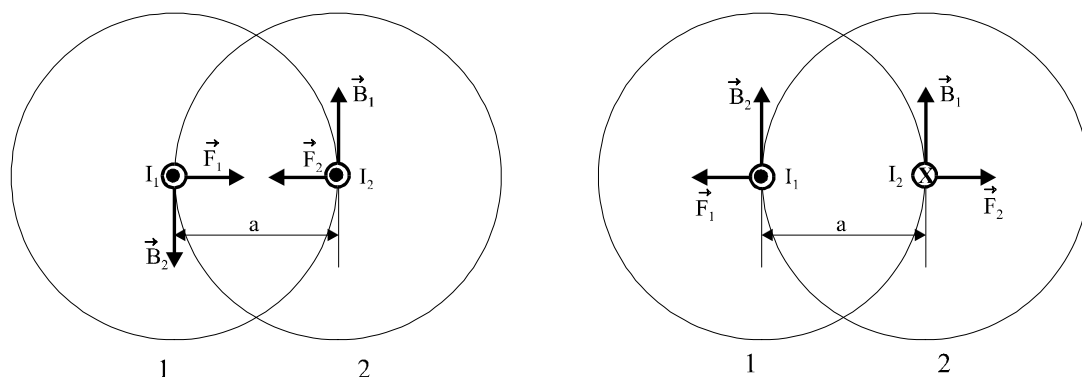
Amper na metr jest natężeniem pola magnetycznego, które powstaje wzdłuż zamkniętej linii koła o obwodzie równym 1 metrowi, jeżeli w przewodniku o przekroju okrągłym znikomo małym, nieskończenie długim i prostoliniowym, przechodzącym przez środek tego koła, prostopadle do jego powierzchni płynie prąd o natężeniu równym 1 Amperowi.

8.5. Oddziaływanie przewodników z prądem

Rozpatrzmy dwa długie prostoliniowe przewodniki, umieszczone równoległe względem siebie w odległości a , przez które płyną odpowiednio prądy I_1 i I_2 (rys.8.6).

Eksperymentalnie stwierdzono, że gdy kierunki przepływu prądu są jednakowe to przewodniki przyciągają się, natomiast gdy kierunki prądów są przeciwne – przewodniki odpychają się wzajemnie (Zjawisko to zostało odkryte przez Ampera w 1820 r.).

Oddziaływanie wzajemne przewodników można wyjaśnić, uwzględniając to, że każdy z przewodników wytwarza pole magnetyczne, które oddziałuje na drugi przewodnik z prądem.



Rys.8.6. Oddziaływanie między dwoma równoległymi przewodnikami z prądem.

Zgodnie z wzorem Ampera (8.6) siła działająca na przewodnik z prądem (prostoliniowy) o długości l umieszczony w polu magnetycznym prostopadłym do przewodnika wyraża się wzorem

$$F = B \cdot I \cdot l$$

Przewodnik 1, w którym płynie prąd I_1 , wytwarza w odległości a od siebie pole magnetyczne \vec{B}_1 o wartości:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu_r I_1}{2\pi a}$$

Kierunek wektora indukcji \vec{B}_1 jest prostopadły do kierunku prądu I_2 w przewodniku 2. Zatem na przewodnik 2 działa siła F_2 równa

$$F_2 = B_1 \cdot I_2 \cdot l = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 \cdot I_2}{2\pi a} \cdot l$$

Podobnie na przewodnik 1 działa siła F_1

$$F_1 = B_2 \cdot I_1 \cdot l = \frac{\mu_0 \mu_r I_2 \cdot I_1}{2\pi a} \cdot l$$

Widzimy, że $F_1 = F_2 = F$ i wynosi

$$F = \frac{\mu_0 \mu_r I_2 \cdot I_1}{2\pi a} \cdot l$$

A więc siła działająca na jednostkę długości każdego z przewodników wyraża się wzorem

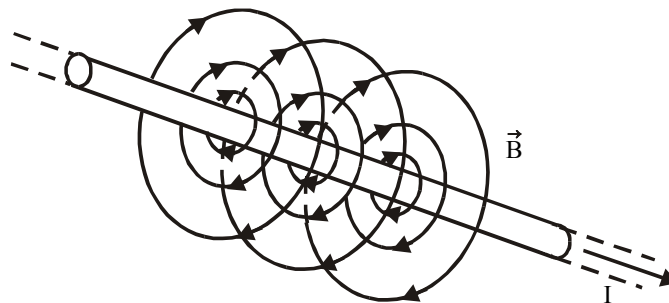
$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 \mu_r I_2 \cdot I_1}{2\pi a} \quad (8.20)$$

Wzór (8.20) pozwala zdefiniować jednostkę natężenia prądu – [A], który jest jednostką podstawową układu SI.

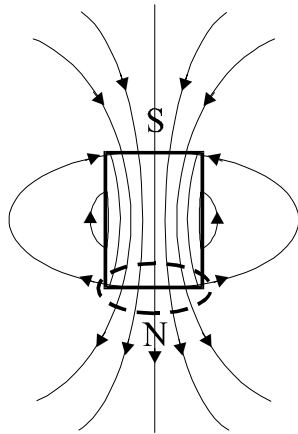
Ampere jest natężeniem prądu nie zmieniającego się, który płynąc w dwóch równoległych prostoliniowych nieskończenie długich przewodach, o przekroju okrągłym znikomo małym, umieszczonych w próżni w odległości 1 m jeden od drugiego – wywołałby między tymi przewodami siłę $2 \cdot 10^{-7}$ N na każdy metr długości przewodu.

8.6. Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

Wiemy już, że linie sił pola magnetycznego są zawsze zamknięte, co dla szczególnych przypadków ilustrują rysunki 8.7 i 8.8.



Rys.8.7. Linie sił indukcji pola magnetycznego wokół prostego przewodu z prądem.



Rys.8.8. Linie sił indukcji pola magnetycznego wokół magnesu trwałego.

Stwierdzony przez nas fakt, że linie sił pola magnetycznego są zawsze krzywymi zamkniętymi, jest ściśle związany z faktem nieistnienia w przyrodzie jednoimiennych ładunków magnetycznych analogicznych do ładunków elektrycznych, co stanowi zasadniczą różnicę między własnościami pola elektrycznego i magnetycznego. Jak wiemy linie pola elektrycznego zaczynają się na ładunkach dodatnich, a kończą na ładunkach ujemnych. Jeżeli zatem otoczmy ładunek elektryczny dodatni zamkniętą powierzchnią to linie sił pola elektrycznego będą przebijać tę powierzchnię na zewnątrz zgodnie z kierunkiem normalnej do powierzchni i strumień indukcji pola elektrycznego przez tę powierzchnię będzie równy wielkości ładunku znajdującego się wewnątrz powierzchni. W przypadku pola magnetycznego sytuacja jest inna (patrz rys.8.8). Linie sił indukcji magnetycznej są krzywymi zamkniętymi (linia przerywana na rys. 8.8), zatem dowolną powierzchnię zamkniętą obejmującą biegun magnetyczny będzie przebijać zawsze jednakowa liczba linii indukcji wchodzących i wychodzących. Stąd też prawo Gaussa dla pola magnetycznego ma postać:

$$\Phi_{B,S} = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (8.21)$$

czyli

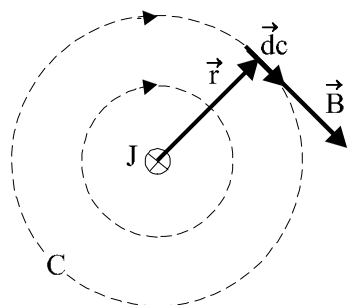
Strumień indukcji magnetycznej $\Phi_{B,S}$ przez dowolną powierzchnię zamkniętą S jest równy zeru.

8.7. Prawo przepływu prądu tzw. prawo Ampere'a.

Obliczmy całkę krzywoliniową

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c}$$

po konturze zamkniętym C (w naszym przypadku po okręgu o promieniu r) wokół nieskończenie długiego prostoliniowego przewodnika z prądem.



Rys.8.9. Cyrkulacja wektora \vec{B} wokół przewodnika z prądem, który wytwarza to pole wynosi μI .

Linie sił pola magnetycznego pochodzącego od prądu prostoliniowego tworzą w płaszczyźnie prostopadłej do przewodnika okręgi koncentryczne o środkach leżących na przewodniku (rys.8.9). Indukcja $|\vec{B}|$ we wszystkich punktach okręgu jest taka sama i wynosi

$$B = \frac{\mu}{4\pi} \frac{2I}{r},$$

a kierunek wektora \vec{B} pokrywa się ze styczną do okręgu.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{2I}{r} \int_0^{2\pi} dc = \mu I$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu I \tag{8.22}$$

Wzór (8.22) jest również prawdziwy dla konturu zamkniętego C dowolnego kształtu obejmującego przewodnik. Co więcej wynik całkowania jest taki sam, gdy przewodnik (nie jest prostoliniowy) ma dowolny kształt. Jeżeli kontur C nie obejmuje przewodnika z prądem, to cyrkulacja z wektora indukcji B po tym konturze jest równa zero.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = 0 \tag{8.23}$$

Gdy pole magnetyczne jest wytwarzane przez kilka przewodników z prądem to wobec zasady superpozycji pól magnetycznych wzór (8.22) można zapisać:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu \sum_{k=1}^N I_k \tag{8.24}$$

gdzie N – ilość przewodników z prądem obejmowanych konturem C.

Wzór (8.24) wyraża matematyczną postać prawa Ampera.

Całka okrężna (po obwodzie zamkniętym) występująca w tym prawie nosi nazwę cyrkulacji albo krążenia wektora \vec{B} .

Wiedząc, że $\vec{B} = \mu\vec{H}$ (8.24) możemy zapisać:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{c} = \sum_{k=1}^N I_k \quad (8.25)$$

W tym przypadku prawo przepływu prądów tzw. prawo Ampera można sformułować następująco:

Cyrkulacja wektora natężenia pola magnetycznego jest równa algebraicznej sumie natężeń prądów płynących wewnątrz konturu obejmującego te prądy.

Liczne doświadczenia wykazały, że powyższe prawo jest również słuszne gdy mamy do czynienia nie tylko z prądem przewodzenia I płynącym przez przewodnik (który jest związany z ruchem przepływu ładunków elektrycznych np. elektronów), ale stosuje się również w przypadku prądu uogólnionego I_u . Prąd uogólniony I_u jest sumą prądu przewodzenia I i prądu przesunięcia I_p związanego ze zmianą w czasie natężenia pola elektrycznego (np. zmianą natężenia pola E w przestrzeni międzyelektrodowej kondensatora podczas jego ładowania lub rozładowywania).

$$I_u = I + I_p \quad (8.26)$$

Aby przekonać się, czy między okładkami kondensatora płynie prąd, wystarczy stwierdzić, czy istnieje tam pole magnetyczne. Liczne doświadczenia wykazały, że rzeczywiście między okładkami kondensatora powstaje pole magnetyczne (linie sił tego pola są okręgami, podobnie jak linie pola magnetycznego wokół przewodnika z prądem), przy czym pole to jest wytwarzane przez kondensator tylko wtedy, gdy się on rozładowuje lub ładuje, tzn. gdy zmienia się w czasie natężenie pola elektrycznego E kondensatora.

Wyrazimy obecnie natężenie prądu przesunięcia jako funkcję szybkości zmiany natężenia pola elektrycznego. Ładunek kondensatora zgodnie z wzorem (7.37) wynosi:

$$Q = \epsilon ES$$

Różniczkując ten wzór względem czasu, otrzymujemy:

$$\frac{dQ}{dt} = \epsilon \frac{dE}{dt} S \quad (8.27)$$

Oznaczając:

$$\frac{dQ}{dt} = I_p$$

oraz wiedząc, że

$$\epsilon dE \cdot S = d\Phi_{D,S},$$

(8.27) możemy zapisać:

$$I_p = \frac{d\Phi_{D,S}}{dt} \quad (8.28)$$

Jak widzimy z (8.28) prąd przesunięcia jest to po prostu szybkość zmian strumienia indukcji magnetycznej.

Korzystając z prądu uogólnionego, prawo Ampera (8.25) możemy ostatecznie zapisać w postaci:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{c} = I_u = I + \frac{d\Phi_{D,S}}{dt} \quad (8.29)$$

8.8. Indukcja elektromagnetyczna

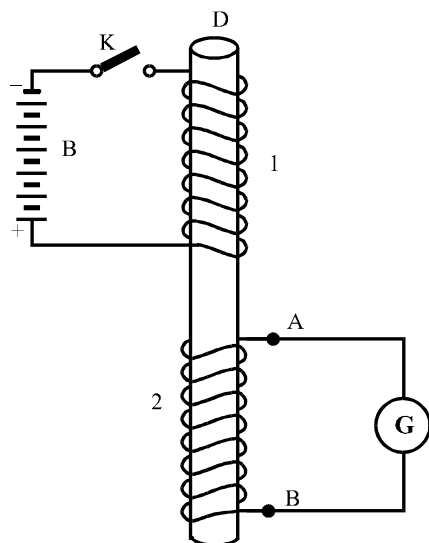
8.8.1. Odkrycia Faradaya

Wiemy już, że pole elektryczne \vec{E} wywołuje w przewodniku przepływ prądu elektrycznego I , który z kolei wytwarza w przestrzeni wokół siebie pole magnetyczne \vec{B} . Fakt ten został po raz pierwszy stwierdzony w doświadczeniu Oersteda w roku 1820. Natychmiast po tym wydarzeniu, zaczęto zastanawiać się – czy zachodzi zjawisko odwrotne, czyli czy pole magnetyczne \vec{B} wytwarza pole elektryczne \vec{E} , a jeśli tak, to jakie prawa rządzą tym procesem.

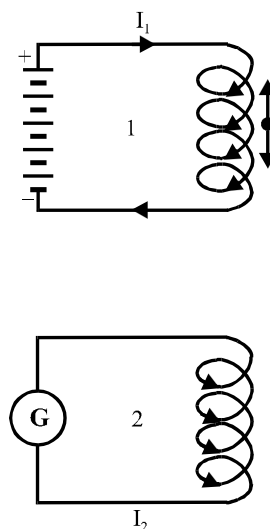
W 1831 roku, po dziesięciu latach wytrwałych prób, Faradayowi udało się rozwiązać to zagadnienie, do którego dążył. Wykonać eksperyment, który miał w następstwie olbrzymie znaczenie dla rozwoju fizyki i techniki. Na zjawisku tym bowiem opiera się m.in. działanie podstawowych współczesnych źródeł energii elektrycznej. Schemat doświadczenia przedstawia rys.8.10.

Na pręt drewniany D nawinięte są dwa długie druty miedziane. Przy nie zmieniającym się natężeniu prądu w pierwszym obwodzie, w drugim obwodzie galwanometr G nie wskazywał prądu, natomiast w czasie zwierania i rozwierania wyłącznika K wskazówka galwanometru G odchyłała się nieco, a następnie wracała szybko do położenia równowagi.

Wynik tego eksperymentu świadczy o powstaniu w drugim obwodzie krótkotrwałego prądu nazwanego później prądem indukcyjnym. Prąd indukcyjny w obwodzie drugim płynął na skutek powstania napięcia między punktami A i B , zwanego siłą elektromotoryczną indukowaną (którą oznaczamy SEM).



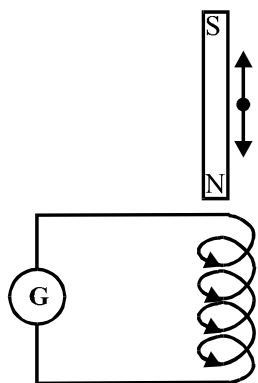
Rys.8.10. Schemat oryginalnego doświadczenia Faradaya prowadzącego do odkrycia zjawiska indukcji.



Rys.8.11. Powstawanie prądu indukcyjnego I_2 w czasie ruchu cewki z prądem I_1 .

Kierunki prądów indukowanych były dla przypadku zwierania i rozwierania przeciwne. Zamiast stosować gwałtowne zmiany prądu przy użyciu klucza K Faraday wskazał, iż prąd indukowany wytwarza się również przy łagodnych zmianach prądu w obwodzie 1, uzyskanych przy pomocy opornika o zmiennym oporze.

Faraday uzyskał również prądy indukowane nieco innymi metodami. Na rys. 8.11 są przedstawione dwie cewki: jedna z prądem stałym druga połączona z galwanometrem G. Faraday zauważył, że prąd w drugiej cewce płynie wówczas, gdy cewki są we wzajemnym ruchu. Przy zbliżaniu i oddalaniu prądy indukowane w cewce 2 mają kierunki przeciwne.

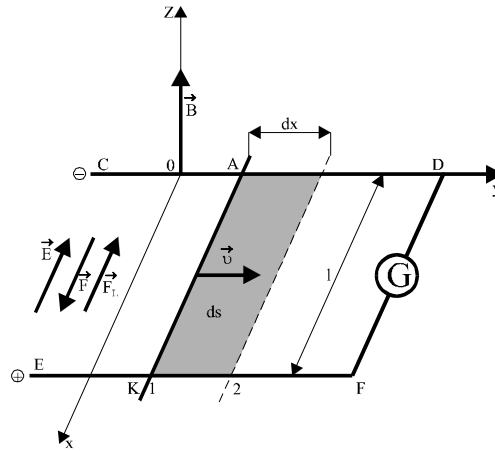


Rys.8.12. Powstawanie prądu indukcyjnego w czasie ruchu magnesu

Podobne zjawiska powstają gdy obwód 1 z prądem z rys.8.11 zastąpiony zostanie stałym magnesem (rys.8.12). W obu przypadkach prądy indukowane płyną jedynie w czasie ruchu obwodu względem innego obwodu z prądem lub magnesem. W czasie spoczynku - prąd indukowany przestaje płynąć.

8.8.2. Prawo indukcji elektromagnetycznej Faraday'a

Wartość SEM indukowanej otrzymujemy z następujących rozważań:



Rys.8.13. Powstawanie SEM między końcami A i K przewodzącego pręta poruszającego się z prędkością \vec{v} poprzecznie do pola magnetycznego \vec{B} .

Utwórzmy obwód w kształcie prostokątnej ramki CDFE leżącej w płaszczyźnie Oxy (rys.8.13). Bok AK tej ramki stanowi ruchoma poprzeczka (prosty kawałek drutu miedzianego) mogąca się ślizgać bez tarcia wzdłuż boków CD i EF. Do punktów D i F obwodu podłączony jest galwanometr G. Ramkę umieszczamy w jednorodnym polu magnetycznym o wektorze indukcji \vec{B} zgodnym z osią Oz. Siłą zewnętrzną przesuwamy AK ze stałą prędkością v od położenia 1 do 2. Na elektrony, które znajdują się w przecie miedzianym o ładunku $(-e)$ poruszające się z prędkością \vec{v} w polu magnetycznym \vec{B} działa siła Lorentza

$$\vec{F}_L = -e(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (8.30)$$

Ponieważ $\vec{v} \perp \vec{B}$ to

$$F_L = |\vec{F}_L| = evB \quad (8.31)$$

Pod wpływem siły Lorentza elektrony przemieszczają się od punktu K do punktu A, w związku z tym ulega naruszeniu równomierność rozkładu ładunku w poruszającym się przecie. Na końcu A gromadzą się elektrony, a więc koniec ten będzie obdarzony ładunkiem elektrycznym $-Q$, zaś koniec K (skutkiem ucieczki z niego elektronów) ładunkiem $+Q$. A więc wewnątrz przewodnika KA powstaje pole elektryczne, którego wektor natężenia \vec{E} skierowany jest od punktu K do punktu A. Ponieważ te punkty są oddalone od siebie o l

(l długość przewodnika KA), dlatego między końcami przewodnika powstaje napięcie elektryczne U , które na mocy (7.32) możemy zapisać:

$$U = E \cdot l \quad (8.32)$$

Pole elektryczne wewnątrz przewodnika o wartości $E = U/l$ działa z kolei na elektrony w pręcie siłą:

$$\vec{F} = -e\vec{E} \quad (8.33)$$

Widzimy, że siła \vec{F} z jaką pole elektryczne \vec{E} działa na elektron jest skierowana przeciwnie do siły Lorentza \vec{F}_L . Gdy siły \vec{F} i \vec{F}_L zrównoważą się, to ruch elektronów w pręcie ustanie.

Dla stanu równowagi mamy:

$$eE = evB \quad (8.33)$$

Stąd

$$U = vBl$$

Napięcie U między końcówkami K i A pręta nazywamy siłą elektromotoryczną indukowaną i oznaczamy:

$$U = -\mathcal{E} \quad (8.34)$$

Zatem siła elektromotoryczna indukowana w pręcie wynosi

$$\mathcal{E} = -Bvl$$

Ponieważ prędkość v ruchu przewodnika wzdłuż osi Ox możemy zapisać $v = \frac{dx}{dt}$, przeto

$$\mathcal{E} = -Bl \cdot \frac{dx}{dt}$$

Iloczyn $l \cdot dx$ oznacza pole powierzchni ds (zakreskowany obszar na rys.8.13) zakreślonej przez przewodnik KA o długości l podczas jego ruchu z prędkością v w czasie dt .

Skoro

$$l \cdot dx = ds$$

a wektor \vec{B} jest prostopadły do powierzchni ds , zatem

$$B \cdot ds = d\Phi_B$$

gdzie $d\Phi_B$ jest strumieniem indukcji magnetycznej przez tę powierzchnię.

Ostatecznie SEM indukowana w pręcie wyraża się wzorem:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (8.35)$$

Otrzymany tu związek jest również słuszny dla obwodu zamkniętego i stanowi podstawowe prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya. Prawo to mówi, że

SEM indukowana w obwodzie (konturze zamkniętym) jest proporcjonalna do szybkości zmiany strumienia magnetycznego w danym obwodzie.

Znak minus we wzorze (8.35) a wprowadzony formalnie w (8.34) nawiązuje do reguły kierunkowej Lenza, która mówi, że kierunek prądu indukowanego w obwodzie jest zawsze taki, że pole magnetyczne przezeń wywołane przeciwstawia się zmianie strumienia magnetycznego, który wywołał pojawienie się prądu indukcyjnego.

Wzór (8.35) wyprowadziliśmy w odniesieniu do prostej, pojedynczej ramki (jednego zwoju). W przypadku cewki złożonej z n zwojów izolowanego drutu, położonych blisko siebie, siły elektromotoryczne indukowane w poszczególnych zwojach dodają się i wypadkowa SEM indukowana równa się:

$$\mathcal{E} = -n \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Korzystając z definicji Webera [Wb] i tesli [T] (patrz podrozdział 8.1) można stwierdzić, że jednostką SEM indukcji jest volt [V]

$$\mathcal{E} = \frac{\text{Wb}}{\text{s}} = \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{m} \cdot \text{s}} = \frac{\text{I}}{\text{A} \cdot \text{s}} = \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{s}} = \text{V}$$

Przedstawiając SEM indukcji z równania (8.35) jako funkcję natężenia pola elektrycznego \vec{E} możemy zapisać:

$$\mathcal{E} = \oint_{\text{po obwodzie zamkniętym}} \vec{E} \cdot d\vec{c}$$

i wtedy (8.35) możemy zapisać w postaci:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (8.36)$$

Równanie (8.36) przedstawia uogólnione prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya. Prawo to można wyrazić słownie następująco:

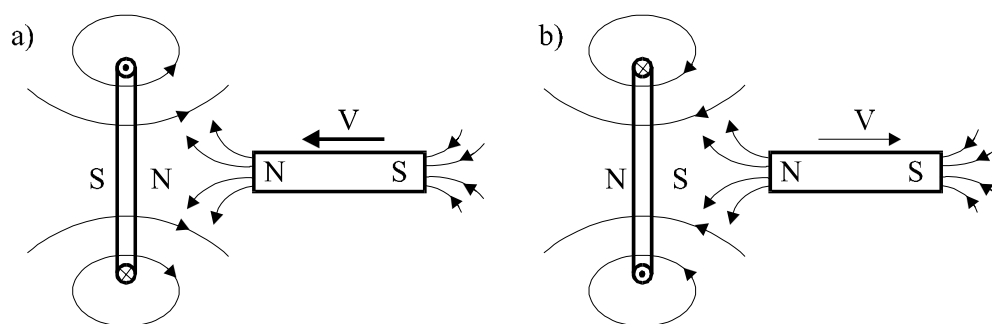
Cyrkulacja wektora natężenia pola elektrycznego po dowolnym konturze zamkniętym (po obwodzie zamkniętym) jest równa co do wartości bezwzględnej i przeciwna co do znaku szybkości zmiany strumienia magnetycznego przechodzącego przez ten kontur.

8.8.3. Reguła Lenza

Jak wspomniano w podrozdziale 8.8.2. kierunek indukowanej SEM można wyznaczyć na podstawie reguły Lenza, według której:

Prąd indukowany w obwodzie ma taki kierunek, że wytwarzane przez ten prąd własne pole magnetyczne przeciwdziała zmianie strumienia magnetycznego, która go wywołuje.

Dla wyjaśnienia tej reguły rozważmy jeszcze raz omawiane poprzednio doświadczenie z magnesem i zwojem. Gdy magnes zbliżamy do zwoju, w zwoju tym indukuje się prąd wytwarzający własne pole magnetyczne (linie tego pola są pokazane na rys. 8.14a). Kierunek pola magnetycznego zwoju jest przeciwny do kierunku pola magnetycznego magnesu. Przeciwdziałanie prądu indukcyjnego polega na tym, że jego pole magnetyczne osłabia zmiany pola magnetycznego wywołane ruchem magnesu; ponieważ przy zbliżaniu magnesu strumień magnetyczny przenikający obwód rośnie, więc prąd indukcyjny wytwarza pole magnetyczne skierowane przeciwnie. Przy oddalaniu magnesu (rys.8.14b) sytuacja jest odwrotna; ponieważ strumień przenikający obwód maleje, więc prąd indukcyjny wytwarza pole skierowane zgodnie z polem magnesu.



Rys.8.14. Analiza zjawiska indukcji na podstawie reguły Lenza: a) przy zbliżaniu magnesu pole magnetyczne prądu indukowanego jest skierowane przeciwnie do pola magnesu – działają siły odpychające; b) przy oddalaniu magnesu pole prądu indukowanego jest skierowane zgodnie z polem magnesu – działają siły przyciągające.

Ze względu na układ linii magnetycznych zwoj z prądem odpowiada magnesowi, który ma z jednej strony biegun N, a z przeciwnej biegun S. Przy zbliżaniu magnesu do zwoju występują siły odpychające, natomiast przy oddalaniu – siły przyciągające. Pokonując te siły wykonujemy pracę, która ulega zmianie w energię prądów indukcyjnych, a energia ta z kolei może zamienić się i wydzielić w postaci ciepła Joule'a. Jeżeli doświadczenie wykonujemy z przeciętym zwojem, to prąd indukcyjny nie popłynie, chociaż SEM powstanie taka sama jak poprzednio. Zbliżanie lub oddalanie magnesu nie wymaga w tym przypadku pracy, zatem nie wystąpią także żadne siły odpychające lub przyciągające.

8.9. Równanie Maxwella

Poznane dotychczas w porządku chronologicznym zjawiska i rządzące nimi prawa związane z polem elektrycznym (rozdział 7) i magnetycznym (rozdział 8) zostały połączone w jedną spójną całość przez angielskiego fizyka J.C.Maxwella, w postaci układu równań tzw. równań Maxwella opisujących wszystkie możliwe zjawiska elektromagnetyczne. Według podanego w postaci (8.29) prawa Ampera prąd przesunięcia, tak jak i prąd przewodzenia wytwarza pole magnetyczne. Zatem, rozumując i uogólniając za Maxwellem, każde zmienne w czasie pole elektryczne związane jest z istnieniem pola magnetycznego. Dalsze badania wykazały, że zmienne pole magnetyczne powoduje z kolei powstawanie pola elektrycznego o czym mówi prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya w postaci (8.36).

Uogólniając ten wniosek Maxwell wysunął założenie, że pole elektryczne powstaje w każdym punkcie przestrzeni, gdzie istnieje zmienne w czasie pole magnetyczne, niezależnie od tego, czy jest tam przewodnik, czy nie. Według wyobrażeń Maxwella przewodnik, w którym pojawia się SEM służą tylko za obiekt, w którym ujawnia się pole elektryczne. Według Maxwella oba zmienne pola elektryczne i magnetyczne, są nierozłącznie ze sobą związane i tworzą tzw. **pole elektromagnetyczne**.

Pole elektromagnetyczne ma charakter wirowy.

Równania Maxwella przedstawia się bądź w postaci całkowitej, bądź w postaci różniczkowej.

Równaniami całkowitymi Maxwella są (już przez nas uprzednio wprowadzone) następujące równania:

- **uogólnione prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya** (8.36)
- **uogólnione prawo przepływu prądów Ampera** (8.29)
- **prawo Gaussa dla pola elektrycznego** (7.23) i
- **prawo Gaussa dla pola magnetycznego** (8.21).

W tabeli 8.1. zestawiono wszystkie cztery równania Maxwella wraz z objaśnieniami, jakich zjawisk one dotyczą. W celu uzyskania pełnego układu równań Maxwella należy do czterech ww. równań dołączyć jeszcze dwa podstawowe związki między dwoma wektorami elektrycznymi i magnetycznymi

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon\vec{E} \\ \vec{B} &= \mu\vec{H}\end{aligned}$$

Równania Maxwella stanowią fundamentalną podstawę teorii zjawisk elektromagnetycznych, podobnie jak zasady dynamiki Newtona są podstawą mechaniki.

Tabela 8.1.

Równania Maxwella w postaci całkowej

Lp.	Równanie	Nazwa	Fakty doświadczalne
1	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{c} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	uogólnione prawo indukcji Faradaya	zmienne pole magnetyczne wytwarza wirowe pole elektryczne, które może wywołać prąd elektryczny
2	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{c} = I + \frac{d\Phi_D}{dt}$	uogólnione prawo przepływu prądów Ampere'a	prąd elektryczny lub zmienne pole elektryczne wytwarza wirowe pole magnetyczne
3	$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$	prawo Gaussa dla pola elektrycznego	ładunek wytwarza pole elektryczne o indukcji odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości
4	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$	prawo Gaussa dla pola magnetycznego	nie istnieje w przyrodzie ładunek magnetyczny, linie indukcji są krzywymi zamkniętymi